221	**Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de ℝ. Exemples.**	Fonction Γ d'Euler	Gourdon p.148 Pommelet p.148 Monier 3 p.187-220

On se place dans le cadre de l'intégrale de Riemann. On considère $f:[a;b[\to E$, $a<b\le+\infty$, E Banach sur K=ℝ ou ℂ.
On suppose f continue, donc localement intégrable (ie int. Sur tout compact), donc $\int_a^x f$ existe.

I. Définition et premières propriétés.

Def 1: (POM) Soient [a;b[un intervalle de ℝ, a∈ℝ, b∈$\overline{\mathbb{R}}$. Si f est une fonction de [a ;b[→E Banach, nous dirons que f admet une intégrale généralisée sur [a ;b[s'il existe $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^b f$. (on dit aussi que l'intgle. Cv.)

Rque : (GOU) ∀c∈[a ;b[, $\int_a^b f$ et $\int_a^c f$ sont de même nature.

Rque : (GOU) Les intégrales impropres convergentes ont les mêmes ptés que les intégrales de Riemann sur [a ;b] : linéarité, positivité (1), rel° de Chasles.

Exemple : (GOU) $\int_a^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ CV ssi λ>0.

Application : (GOU) **Intégrales de référence : Riemann**

. Pour a>0, $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$, CV ssi α>1. (Riemann en ∞)

. Pour b>0, $\int_0^{b}\frac{dt}{t^\alpha}$, CV ssi α<1. (Riemann en 0)

Prop 1 : (GOU) **Critère de Cauchy pour les intégrales.**
Soit $f:[a;b[\to E$ loc. int. sur [a ;b[.

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi :

$$\forall\varepsilon>0,\exists A\in[a;b[,\forall x,y\in[A,b[,\left\|\int_x^y f(t)\,dt\right\|<\varepsilon.$$

Def 2 : (GOU) Soit $f:[a;b[\to E$ loc. int. sur [a ;b[. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ **CV absolument** ssi $\int_a^b\|f(t)\|\,dt$ CV.

Prop 2 : (GOU) (2) **ABS CV ⇒ CV.**

C'est à cause de ce critère que l'on va s'intéresser aux :

II. Intégrales impropres de fonctions à valeurs positives.

On considère ds ce § $f:[a;b[\to\mathbb{R}^+$, loc. int sur [a ;b[.

Prop 3 : (GOU) $\int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi :

$$\exists M>0,\forall x\in[a;b[,\int_a^x f(t)\,dt\le M.$$

Exemple : (GOUex) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ CV.

Th 1 : (GOU) **Comparaison.** Soit $g:[a;b[\to\mathbb{R}$ loc. int sur [a ;b[tq $0\le f\le g$. (3)

(i) $\int_a^b g(t)\,dt$ CV ⇒ $\int_a^b f(t)\,dt$ CV.

(ii) $\int_a^b f(t)\,dt$ DV ⇒ $\int_a^b g(t)\,dt$ DV.

Prop 4 : (MON) **Test du x^α.** (b =+∞, a >0).

. S'il existe α>1 tq $x^\alpha f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, alors $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ CV

. S'il existe α≤1 tq $x^\alpha f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$, alors $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ DV

Exemple : $\int_1^{+\infty}e^{-(\ln x)^a}dx$ CV ssi a>1.

Application : (MON) **Intégrales de référence : Bertrand**

. $\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ CV ssi $((\alpha>1)$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1))$

. $\int_0^{1/e}\frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ CV ssi $((\alpha<1)$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1))$

Et s'applique à l'étude de la fonction Γ d'Euler en +∞.

Prop 5 : (POM) **Equivalence.** Soit $g:[a;b[\to\mathbb{R}$ loc. int sur [a ;b[tq $f\sim g$ lorsque x→b.

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature. (4)

Si elles DV, $\int_x^b f(t)\,dt\underset{x\to b}{\sim}\int_x^b g(t)\,dt$ (« restes » équivalts).

Exemple: (MON) $\int_1^x\frac{\operatorname{th}t}{\sqrt{t(t+1)}}dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$ (ex.2.5.33p.210)

Application : La fonction Γ d'Euler (GOUp.162/MONp.220).
Pour tout $x\in]0;+\infty[$, l'application $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur]0;+∞[. On appelle fonction Γ d'Euler l'application Γ:]0;+∞[→ℝ, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$.

Prop 6: (GOUp206) **Comparaison série-intégrale.**
Soit $f:\mathbb{R}^+\searrow\mathbb{R}^+$ décroissante à valeurs positives.

Alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty}f$ sont de même nature.

(GOU) En posant f = -f, ttes ces Ptés se généralisent au cas f<0, mais elles sont fausses si f change de signe ou est à valeurs complexes. Dans ce cas, on a: ↴

III. Fonctions à valeurs dans E.

Lorsqu'une intégrale converge sans être absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.
Exemple de fonction non intégrable dont l'intégrale généralisée CV: (MON) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *(p.201) est semi-CV.*

A. Propriétés.

Prop 7: (GOU) **Intégration par parties.** (5)
Soient u, v C^1 à valeurs $\mathbb{C}$. On supp. que $\lim_b (uv) = u(b)v(b)$ existe. Alors $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ et $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ st de m. nature, et en cas de CV, on a:
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Exemple: (MON) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$ CV. (ex 2.5.37p214)

Exemple: (MON) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ CV. (p.201-210)

Exemple: (GOU) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ CV pour tout α>0. (p.150)

Prop 8: (GOU) **Changement de variable.** (6)
Soient φ C^1-difféomorphisme ↗ de [α;β[→ [a;b[.
(-∞<α<β≤+∞), et $f : [a;b[\to E$ continue.
Alors $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\int_a^b f(x)dx$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Exemple: (GOU) $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ CV (p.151) - *suite de l'exple précédent.*

B. Règle d'Abel.

Th 2: (GOU) Soient $f, g : [a;b[\to \mathbb{R}$ loc. int. sur [a;b[tq.
(i) f ↘ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (en part. f est positive)
(ii) $\exists M > 0$ tq. $\forall x \in [a;b[$, $\left|\int_a^x g(t)dt\right| \le M$
Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exemple: (GOU) Autre mθ pour mq. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ CV pour tout α>0. (p.150)

IV. Notes.

(1)positivité de l'intégrale : f>0 ⇒ $\int f > 0$.

(2)Vrai si E Banach, faux sinon. Réciproque fausse (semi-cv).

(3) Se démontre par f>0⇒ $\int f$ ↗, donc majorée ⇒ cv.

(4) Se démontre par : $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in]a;b[tq \forall x \in]c;b[$,
$|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow (1-\varepsilon)g(x) \le f(x) \le (1+\varepsilon)g(x)$

(5) Preuve IPP: intégrer (uv)'=u'v+uv'.

(6) C^1-difféomorphisme: Bijection* C^1 ainsi que sa réciproque. *Injection suffit, car on travaille sur f(U), sur lequel f est alors bijective.